25/05/17

Ορισμός: Ένας δακτύλιος είναι μία τριάδα $\langle R, +, \cdot \rangle$ όπου R είναι ένα (μη-κενό) σύνολο και:

$+ : R \times R \to R, \ (r,s) \mapsto r+s$ (πρόσθεση)

$\cdot : R \times R \to R, \ (r,s) \mapsto r \cdot s$ (πολ/μός)

είναι 2 πράξεις επί του R, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $\forall x,y,z \in R : (x+y)+z = x+(y+z)$
2. $\forall x,y \in R : x+y = y+x$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x+0 = x = 0+x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x+(-x) = 0 = (-x)+x$

Το ζεύγος $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα

5. $\forall x,y,z \in R : x\cdot(y\cdot z) = (x \cdot y)\cdot z$
6. $\forall x,y,z \in R : \begin{cases} x(y+z) = x\cdot y + x \cdot z \\ (x+y)z = xz + yz \end{cases}$ (επιμεριστική ιδιότητα του πολ/μού ως προς την '+')
7. $\exists 1_R \in R : \forall x \in R : x \cdot 1_R = x = 1_R \cdot x$

Ο δακτύλιος $\langle R, +, \cdot \rangle$ θα καλείται __μεταθετικός__ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in R : x\cdot y = y \cdot x$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ : Το μηδ. στοιχ. 0 και το στοιχείο 1_R είναι μοναδικά. Το στοιχείο 1_R θα το γράφουμε με 1 και θα το καλούμε μονάδα του δακτυλίου.

Π.χ. : Με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολ/μου οι τριάδες: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $\langle \mathbb{Q},+,\cdot\rangle$, $\langle \mathbb{R},+,\cdot\rangle$, $\langle \mathbb{C},+,\cdot\rangle$ είναι δακτύλιοι (μεταθετικοί).

Π.χ. : Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$ και τότε με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολ/μου κλάσεων υπολοίπων mod n, η τριάδα $\langle \mathbb{Z}_n,+,\cdot\rangle$ αποτελεί μεταθετικό δακτύλιο.

Παράδειγμα Δακτυλίου χωρίς μονάδα : Έστω το σύνολο $2\mathbb{Z} = \{2n \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Τότε η τριάδα $\langle 2\mathbb{Z},+,\cdot\rangle$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του δακτυλίου εκτός του (7). Αν $\exists x \in 2\mathbb{Z} : xy = y = yx$, $\forall x, y \in 2\mathbb{Z}$. Τότε $x = 2n$ και $y = 2m$ και τότε: $2m \cdot 2n = 2m \Rightarrow$
$\Rightarrow 2mn = m \Rightarrow 2n = 1$ άτοπο, διότι $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι η τριάδα $\langle 2\mathbb{Z},+,\cdot\rangle$ είναι μεταθετικός δακτύλιος χωρίς μονάδα με την έννοια του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός : Μια τριάδα $\langle R,+,\cdot\rangle$ καλείται δακτύλιος χωρίς μονάδα $\Leftrightarrow$ η τριάδα $\langle R,+,\cdot\rangle$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα εκτός του (7).

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $\langle R,+,\cdot\rangle$ ένας δακτύλιος και έστω $n \geq 1$.
Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{M}_n(R) = \left\{ A = (r_{ij}) \;\middle|\; \begin{matrix} r_{ij} \in R \\ 1 \leq i,j \leq n \end{matrix} \right\}$ όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από τον R.

Δηλαδή:
$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Στο σύνολο $M_n(R)$ ορίζουμε πράξεις: $A=(r_{ij}),\ B=(s_{ij})\in M_n(R)$

$A+B=(r_{ij}+s_{ij})$

$A\cdot B=(t_{ij})$, όπου $t_{ij}=\sum_{k=1}^{n} r_{ik}s_{kj} \longrightarrow (r_{i1}\dots r_{in})\begin{pmatrix} s_{1j}\\ \vdots \\ s_{nj}\end{pmatrix}$

Τότε η τριάδα $\langle M_n(R),+,\cdot\rangle$ είναι δακτύλιος με μονάδα

$$1_{M_n(R)}=\begin{pmatrix} 1_R & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1_R\end{pmatrix}=I_n$$

<u>Για παράδειγμα</u>: ορίζονται οι δακτύλιοι $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{Q})$, $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{Z}_m)$

Ο δακτύλιος $M_n(R)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $n=1$ και R: μεταθετικός δακτύλιος.

<u>Π.χ.</u>

Έστω $\langle R,+,\cdot\rangle$ ένας δακτύλιος και έστω $S\neq\emptyset$.

Έστω $F(S,R)=\{f:S\to R \mid f:\text{απεικόνιση}\}$

Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις επί του $F(S,R)$.

Αν $f,g\in F(S,R)$ τότε: $f+g:S\to R$, $(f+g)(s):=f(s)+g(s)$

και $f\cdot g:S\to R$, με $(f\cdot g)(s):=f(s)\cdot g(s)$

Τότε η τριάδα $\langle F(S,R),+,\cdot\rangle$ με μονάδα $1_{F(S,R)}:S\to R$

με $s\longmapsto 1_R$ (δηλ η σταθερή συνάρτηση)

Αν R: μεταθετικός δακτύλιος τότε και $F(S,R)$ μεταθ.

Π.χ. $S=[0,1]\subseteq\mathbb{R}\longmapsto F([0,1],\mathbb{R})$

$S=\mathbb{R}\longmapsto F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$C([0,1],\mathbb{R})=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f:\text{συνεχής}\}\subseteq F([0,1],\mathbb{R})$.

Τότε $\langle C([0,1],\mathbb{R}),+,\cdot\rangle$ είναι μεταθετικός δακτύλιος.

<u>Ορισμός</u>: Αν $\langle R,+,\cdot\rangle$ είναι ένας δακτύλιος και $S\subseteq R$, τότε

το S καλείται <u>υποδακτύλιος</u> του R $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (1) $0\in S$, (2) $\forall s_1,s_2\in S: s_1-s_2\in S$, (3) $\forall s_1,s_2\in S: s_1\cdot s_2\in S$

(4) $1_R\in S$.

Οι ιδιότητες ①, ② είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη ότι $S \leq (R,+)$.

Πρόταση: Ένα υποσύνολο $S \subseteq R$, R: δακτύλιος, είναι υποδακτύλιος ⟺ ① S κλειστό στις '+', '·', και ② η τριάδα $<S,+,\cdot>$ είναι δακτύλιος.

Αν στον ορισμό υποδακτυλίου δεν απαιτήσουμε την ιδιότητα ④ τότε έχουμε την έννοια του υποδακτυλίου χωρίς μονάδα.

Π.χ.: ① $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Τότε το $2\mathbb{Z}$ είναι υποδακτύλιος χωρίς μονάδα του $\mathbb{Z}$.

② $S = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$.

Το S: υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$ χωρίς μονάδα.

Επιπλέον αν $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ έτσι ώστε $\forall \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x\alpha & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\alpha = x \wedge xb = y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Για $x=1$ και $y=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 1$ και $b = 0$. Για διαφορετικές τιμές των x, y προκύπτουν διαφορετικές τιμές για τα α, b και τότε ο $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να είναι μονάδα του S, διότι αν υπάρχει μονάδα τότε είναι μοναδική.

③ $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

Τότε S υποδακτύλιος χωρίς μονάδα του $M_2(\mathbb{R})$ αλλά $<S,+,\cdot>$ δακτύλιος με μονάδα $1_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$
$\neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{M_2(\mathbb{R})}$

Έστω $<R,+,\cdot>$ ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα 1_R. Θεωρούμε το $R[[t]] = \{(r_n)_{n\geq 0} \mid r_n \in R, n \geq 0\}$
Ένα στοιχείο του $R[[t]]$ είναι μια ακολ. στοιχείων του R: $(r_n)_{n\geq 0} = (r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$